Método Axiomático e Teorias Formais

#10

Verdade de Tarski – Parte 1

Interpretação

Uma interpretação I de uma linguagem de primeira ordem consiste em:

- Um domínio D de interpretação;
- Para cada constante individual, atribuímos como seu significado um elemento do domínio D;
- Para cada letra predicativa A_i^n, atribuímos como seu significado uma relação n-ária;
- Para cada letra funcional f_i^n, atribuímos como seu significado uma operação n-ária.

Valoração

Definição 1 – Uma valoração v em uma interpretação I de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ é uma função cujo domínio é o conjunto de termos de $\mathcal{L}$ e contradomínio é o conjunto D_I (domínio da interpretação I) que satisfaz:

a) Para cada constante individual a_i de $\mathcal{L}$, $v(a_i) = \overline{a_i}$, em que $\overline{a_i}$ é a interpretação de a_i.
b) Se f_i^n é uma letra funcional e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, então $v\left(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)\right) = \overline{f_i^n}\left(v(t_1), \ldots, v(t_n)\right)$, em que $\overline{f_i^n}$ é a interpretação de f_i^n.

Valoração

Valoração é, portanto, uma correspondência entre os termos de uma linguagem e suas interpretações.

Dados $v(a_i)$, uma valoração é completamente determinada especificando-se os valores de $v(x_1), v(x_2)$, ...

$v(x_1), v(x_2)$, ... são elementos de D_I.

Cada sequência $(s_1, s_2, \dots)$ de elementos de D_I nos dá uma valoração.

Exemplo: Teoria de Grupos

Linguagem (além dos conectivos, auxiliares, variáveis, quantificadores):

- Constante individual a_1
- Letra funcional f_1^2
- Letra predicativa A_1^2

Uma interpretação I seria a seguinte:

- O domínio de interpretação é $D_I = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- a_1 possui como interpretação $0 \in \mathbb{Z}$.
- f_1^2 possui como interpretação a soma usual em $\mathbb{Z}$
- A_1^2 possui como interpretação a igualdade usual em $\mathbb{Z}$.

Exemplo: Teoria de Grupos

Podemos especificar uma valoração em I assim:

- $v(a_1) = 0$

A interpretação do termo $f_1^2(x_1, x_2)$ será dada por

- $v\left(f_1^2(x_1, x_2)\right) = \overline{f_1^2}\left(v(x_1), v(x_2)\right) = v(x_1) + v(x_2)$

A interpretação associada a $f_1^2(x_1, x_2)$ dependerá, portanto, das interpretações associadas a x_1 e x_2.

Por exemplo, se $v(x_1) = 1$ e $v(x_2) = 2$, então $v\left(f_1^2(x_1, x_2)\right) = 1 + 2$.

Valorações equivalentes

Definição 2 – Duas valorações são equivalentes quando coincidem em todos os seus valores (interpretações), exceto possivelmente em uma dada variável.

Exemplo: Sejam duas valorações v_1 e v_2 determinadas assim:

$v_1(x_1) = 1, v_1(x_2) = 2, v_1(x_3) = 3, \ldots, v_1(x_i) = i$.

$v_2(x_1) = 2, v_2(x_2) = 2, v_2(x_3) = 3, \ldots, v_2(x_j) = j$.

Verdade de Tarski: Considerações Iniciais

Uma valoração possui o efeito de atribuir um valor verdade à uma dada fórmula α de uma linguagem de primeira ordem:

1. Substituímos cada termo t que aparece em α por $v(t)$;
2. Substituímos cada letra funcional e cada letra predicativa pelas suas interpretações em I
3. Obtemos assim uma sentença sobre elementos do domínio de interpretação D_I, que pode ser verdadeira ou falsa.
4. Se for verdadeira, dizemos que v satisfaz α.

Alfred Tarski (1901-1983)

Satisfatibilidade

Definição 3 – Sejam A uma fbf de $\mathcal{L}$ e I uma interpretação de $\mathcal{L}$. Dizemos que uma valoração v em I satisfaz A quando:

(S1) v satisfaz a fórmula atômica $A_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ sse $\overline{A_j^n}\big(v(t_1), \ldots, v(t_n)\big)$ é uma sentença verdadeira sobre os elementos de D_I.
(S2) v satisfaz $(\neg B)$ sse v não satisfaz B.
(S3) v satisfaz $(B \rightarrow C)$ sse ou v satisfaz $(\neg B)$ ou v satisfaz C.
(S4) v satisfaz $(\forall x_i)B$ sse toda valoração v' que é equivalente a v satisfaz B.

Exemplo: Aritmética dos Naturais

Vamos especificar uma linguagem para a aritmética dos números naturais.

- Símbolos auxiliares, variáveis, conectivos e quantificadores.
- Uma constante individual: a_1.
- Três letras funcionais: f_1^1, f_1^2 e f_2^2.
- Uma letra predicativa: A_1^2.

Consideremos a seguinte interpretação J:

- O domínio de interpretação é $D_J = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- A interpretação de a_1 é $0 \in \mathbb{N}$.
- As interpretações de f_1^1, f_1^2 e f_2^2 são, respectivamente, as operações de sucessor, soma e multiplicação usuais entre naturais.
- A intepretação de A_1^2 é a igualdade usual entre naturais.

Exemplo 1

Consideremos a seguinte fórmula $\alpha =_{def} A_1^2\left(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_3, x_4)\right)$.
Verifiquemos se alguma valoração a satisfaz.

Para isso, temos que encontrar uma interpretação J e uma valoração v que satisfaz α (a intepretação J já foi dada anteriormente).

Vamos utilizar a definição (S1): v satisfaz a fórmula atômica $A_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ sse $\overline{A_j^n}\left(v(t_1), \ldots, v(t_n)\right)$ é verdadeira em D_I.

Seja v uma valoração em J. Verifiquemos então se $\overline{A_j^n}\left(v(t_1), \ldots, v(t_n)\right)$ pode ser verdadeira:

Exemplo 1: Passo a Passo

$\overline{A_1^2}\left(v\left(f_2^2(x_1, x_2)\right), v\left(f_2^2(x_3, x_4)\right)\right)$

A letra predicativa A_1^2 é interpretada como igualdade:

$v\left(f_2^2(x_1, x_2)\right) = v\left(f_2^2(x_3, x_4)\right)$.

De acordo com a definição de valoração, temos

$\overline{f_2^2}\left(v(x_1), v(x_2)\right) = \overline{f_2^2}\left(v(x_3), v(x_4)\right)$.

A letra funcional f_2^2 foi interpretada como a multiplicação:

$v(x_1) * v(x_2) = v(x_3) * v(x_4)$.

Se v é uma valoração para a qual $v(x_1) = 2, v(x_2) = 6, v(x_3) = 3$ e $v(x_4) = 4$, então $\overline{A_1^2}\left(v\left(f_2^2(x_1, x_2)\right), v\left(f_2^2(x_3, x_4)\right)\right)$ é uma sentença verdadeira sobre números naturais.

Logo, v satisfaz α.

Exemplo 1: Resumo

Estamos analisando esta fórmula: $A_1^2\left(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_3, x_4)\right)$

Sua interpretação em J é $x_1 * x_2 = x_3 * x_4$.

Se atribuirmos os valores

- $v(x_1) = 2$
- $v(x_2) = 6$
- $v(x_3) = 3$
- $v(x_4) = 4$

Deixarei outros exemplos em material complementar.

Então, $2 * 6 = 3 * 4$ é uma sentença verdadeira (sobre os elementos de D_J). Portanto, v satisfaz essa fórmula.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br